

# Übersicht über Feldberechnungsverfahren

## Diskretisierungsarten

- Gebietsdiskretisierung (Domain methods)
  - + inhomogene Gebiete, nichtlineare Materialien, analytischer Teil einfacher, dünn besetzte Matrizen, iterative Lösungen
  - Konvergenz wenn hohe Genauigkeit und Zuverlässigkeit erforderlich, Erzeugung von Gittern oder Maschen, offene Gebiete
- Randdiskretisierung (Boundary methods)
  - + Diskretisierung, Konvergenz, Genauigkeit, Zuverlässigkeit, Fehlerabschätzung, offene Gebiete
  - Dichte Matrizen, Kondition, komplizierte Materialien, analytische Kenntnisse
- Keine Diskretisierung (analytische Lösungen mit numerischer Auswertung von Integralen etc.)

## Grundgleichungen

- Differentialgleichungen (Maxwell, Wellengleichungen, Laplace, Poisson, Helmholtz...)
- Integralgleichungen (Maxwell, Coulomb, Ampère, Green, EFIE, HFIE, MFIE...)
- Differentio-Integralgleichungen
- Geometrische Optik, Strahlenoptik, Physikalische Optik
- Heuristische Daten

## Zeitbereich – Frequenzbereich

- Zeitbereich + zeitabhängige Materialien, schnelle iterative Verfahren
- Frequenzbereich + frequenzabhängige Materialien, Messresultate, kleine Matrizen

## Anwendungsbereich

- Gross + Allgemeinheit, Einheitlichkeit der Bedienung, Zuverlässigkeit
- Klein + Effizienz, Bedienbarkeit

## Einige prominente Beispiele

- FD (Finite Differenzen): Direkte Diskretisierung der Differentialgleichungen
- FI (Finite Integrale): Direkte Diskretisierung der Integralgleichungen
- FE (Finite Elemente): Ursprünglich Variationsintegrale, Raumunterteilung in Elemente
- TLM (Transmission Line Matrix): Ersatzschaltungen
- MoM (Method of Moments, Momentenmethode): Diskretisierung von Ladung/Strom
- MMP (Mehrfach Multipol Programm): Allgemeine Gebietsmethode mit Multipolen
- GTD (General Theory of Diffraction): Erweiterung der geometrischen Optik
- Monte Carlo Simulation: Analogie Laplace Operator – Random Walk

## Anwendungsbereiche

Ursprünglich nur Grossprojekte (Flugzeugbau, Schiffsbau, Raumfahrt, grosse Maschinen), Grundlagenforschung (z.B. Nanotechnologie), Design von Neuentwicklungen, Sicherheitsfragen (EMV, Bioelectromagnetics), Interpretation von Messresultaten (inverse scattering, Datenaufbereitung), Optimierung von Produkten.

# Finite Differenzen (FD)

Das Finite Differenzen (FD) Verfahren ist insofern besonders einfach, als es auf der bekannten Definition der Ableitung  $f'(x)$  einer Funktion  $f(x)$  beruht und nahezu problemlos direkt auf eine gegebene Differentialgleichung übertragen werden kann. Bekanntlich gilt

$$f'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}. \quad (1)$$

Lassen wir den Limes in (1) weg und setzen wir für die infinitesimal kleine Differenz  $\varepsilon$  eine endliche (finite) Differenz  $d$ , so erhalten wir die einfache numerische Approximation

$$f'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + d) - f(x)}{d} + e(x, d) \approx \frac{f(x + d) - f(x)}{d}. \quad (2)$$

Dabei bezeichnet  $e$  den Fehler der Approximation. Offensichtlich wird dieser beliebig klein, wenn  $d$  genügend klein ist und die Funktion  $f$  genügend 'brav' ist. Diese Aussage gilt allerdings nur unter der Voraussetzung einer unendlich genauen Arithmetik, welche in Computern nicht gegeben ist. Die endliche Rechengenauigkeit führt zu einer ungenauen Berechnung der Differenz im Zähler von (2). Bei ausreichend kleinem  $d$  ergibt sich eine *Stellenauslöschung*, welche schliesslich zur (im allgemeinen) völlig falschen Lösung  $f'=0$  führt. Bei der Wahl der finiten Differenz  $d$  ist deshalb eine gewisse Vorsicht am Platze. Praktisch ist  $d$  fast immer so gross, dass der durch die Stellenauslöschung verursachte Fehler vernachlässigbar ist.

Neben (2) findet man leicht andere und kompliziertere Approximationen von Ableitungen. Zunächst wohl

$$f'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x) - f(x - d)}{d} + e(x, d) \approx \frac{f(x) - f(x - d)}{d}. \quad (2')$$

Da man die  $x$  Achse meist von links nach rechts zeichnet, nennt man (2) rechtsseitige und (2') linksseitige Ableitung. Diese Ableitungen lassen sich beliebig kombinieren. Ein Teil der Kunst besteht darin, einfache Approximationen zu finden, welche zu möglichst kleinen Fehlern führen. Wir wollen diese Problematik jedoch hier nicht weiter verfolgen und suchen nun sofort eine FD Approximation für die zweidimensionale Laplace Gleichung, welche insbesondere in der Statik von grosser Bedeutung ist:

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \quad (3)$$

Dabei haben wir der Einfachheit halber *kartesische Koordinaten* eingeführt. Zu diesen Koordinaten passt eine *Diskretisierung* des zweidimensionalen Raumes mit einem rechteckigen Gitter (siehe Figur 1). Die zweifache Ableitung nach  $x$  erhalten wir natürlich durch Ableitung der ersten Ableitung. Die zweifache Ableitung nach  $y$  erhalten wir analog. Für einen Gitterpunkt erhalten wir schliesslich

$$\Delta f(x_i, y_j) \approx \frac{f(x_i + d, y_j) + f(x_i - d, y_j) + f(x_i, y_j + d) + f(x_i, y_j - d) - 4f(x_i, y_j)}{d^2} = 0 \quad (4)$$

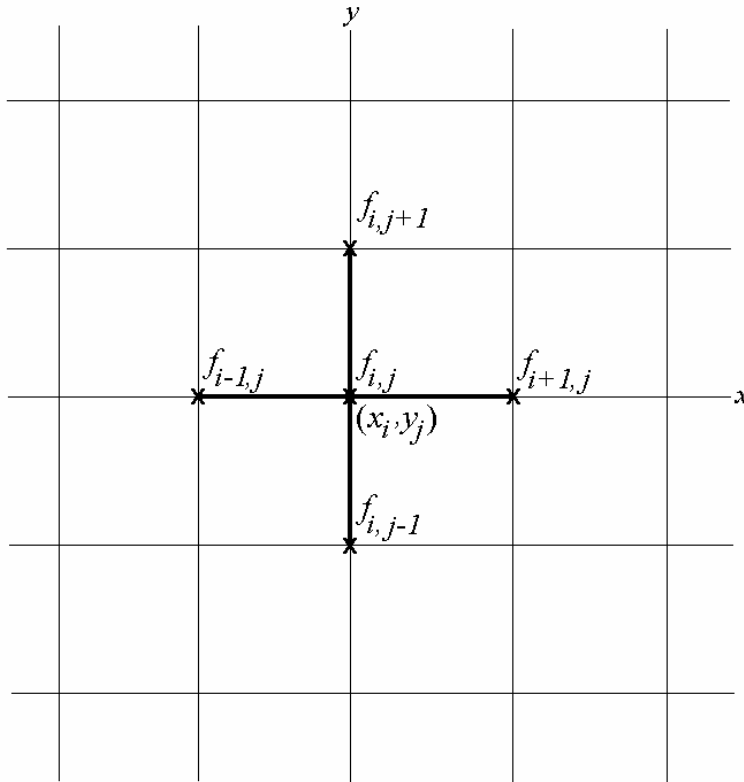
oder kürzer

$$\Delta f(x, y) \approx \frac{f(x_{i+1}, y_j) + f(x_{i-1}, y_j) + f(x_i, y_{j+1}) + f(x_i, y_{j-1}) - 4f(x_i, y_j)}{d^2} = 0 \quad (4')$$

und noch kürzer

$$\Delta f(x, y) \approx \frac{f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 4f_{i,j}}{d^2} = 0. \quad (4'')$$

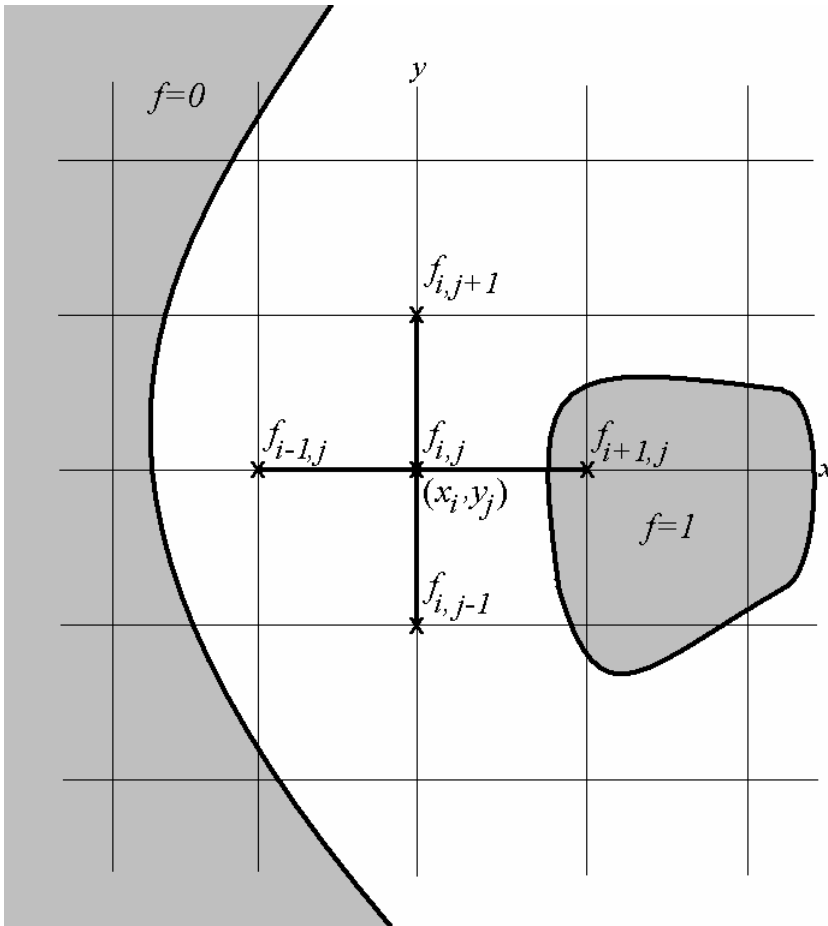
Diese Approximation der Laplace Gleichung, bzw. des Laplace Operators wird auch *5-Punkt-Stern Operator* genannt, da er das Feld  $f$  in fünf Punkten verknüpft, welche die Form eines vierzackigen Sterns haben. Offensichtlich verknüpft dieser Operator das Feld im zentralen Gitterpunkt mit dem Feld in den vier nächstgelegenen Nachbarpunkten.



**Figur 1:** *Regelmässiges FD Gitter und 5-Punkt-Stern Operator.*

Neben dem besonders einfachen 5-Punkt-Stern Operator, lassen sich beliebig viele FD Approximationen des Laplace Operators finden. Ausserdem lassen sich auch Operatoren auf unregelmässigen Gittern finden. Diese sind naturgemäss komplizierter als der 5-Punkt-Stern Operator. Schliesslich führt ein analoges Vorgehen auf FD Approximationen für die dreidimensionale Laplace Gleichung und auf Approximationen für kompliziertere Differentialgleichungen.

Zunächst stellt sich jedoch die Frage, wie man mit Hilfe von (4) und ähnlichen FD Operatoren das gesuchte Feld  $f$  finden kann. Wir betrachten der Einfachheit halber die Berechnung der Kapazität einer einfachen Anordnung von zwei Elektroden, wobei eine die andere vollständig umschliesst. Ein typisches Beispiel dafür ist ein Koaxialkabel. Dabei wird angenommen, das skalare Potential der inneren Elektrode sei 1 und dasjenige der äusseren Elektrode sei 0. Über diese Anordnung wird nun ein regelmässiges Gitter gelegt. Figur 2 zeigt ein solches.



**Figur 2:** Ausschnitt eines elektrostatischen Problems zwei Elektroden und regelmässigem FD Gitter. Die Elektroden sind grau markiert.

Offenbar sind nun die Potentialwerte  $f$  aller Gitterpunkte, welche in einer Elektrode liegen vorgegeben, alle andern Werte sind unbekannt. Das FD Verfahren beginnt nun mit einer *Initialisierung*. Dabei wird allen inneren Gitterpunkten ein mehr oder weniger plausibler Wert zugewiesen. Besonders häufig einfach  $f_{ij}^0=0$ . Der hochgestellte Index 0 kennzeichnet dabei das Initialfeld. Nun wird in jedem Gitterpunkt (4) verwendet um eine Lösungsverbesserung zu erhalten. Dazu wird (4'') nach  $f_{ij}$  aufgelöst und auf der rechten Seite das Initialfeld eingesetzt:

$$f_{i,j}^1 \approx \frac{f_{i+1,j}^0 + f_{i-1,j}^0 + f_{i,j+1}^0 + f_{i,j-1}^0}{4d^2}. \quad (4''')$$

Damit ergibt sich eine erste Näherung, welche mit dem hochgestellten Index 1 markiert ist. Diese Näherung ist meist noch sehr ungenau, lässt sich aber durch wiederholte Anwendung von (4) iterativ verbessern. Das Verfahren wird abgebrochen, wenn die Änderungen eines Iterationsschrittes in allen Gitterpunkten genügend klein sind. Ob das Verfahren *konvergiert* und wie *genau* die erzielte Lösung ist, hängt von der Wahl des FD Operators, der Wahl des Gitters und verschiedenen andern Faktoren ab. Zum Beispiel, spielt die *Reihenfolge* in der die Gitterpunkte bearbeitet werden eine Rolle. Es bestehen ausserdem häufig verschiedene Möglichkeiten, die Konvergenz zu beschleunigen.

MaX-1 (Demo Version siehe <http://alphard.ethz.ch/hafner/max1.htm>) bietet die Möglichkeit, solche Untersuchungen relativ leicht durchzuführen.

# FD-TD und FI

Die FD-TD (Finite Differenzen – Time Domain) Methode wurde von Yee schon in einer Zeit vorgeschlagen, als die Computer nicht in der Lage waren FD-TD Lösungen für praktische Probleme zu finden. Die Idee ist dabei relativ einfach: Die Maxwell Gleichungen in Differentialform werden in FD Manier ohne Umschweife direkt diskretisiert. Dazu braucht es kaum analytische Kenntnisse. Zu beachten ist zunächst lediglich, dass in homogenen, ladungs- und stromfreien Gebieten die beiden Maxwell Gleichungen welche die Divergenz enthalten automatisch erfüllt werden, wenn die Maxwell Gleichungen mit der Rotation erfüllt werden. Der Einfachheit halber betrachten wir ausserdem nur den verlustfreien Fall. Wir setzen also

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = 0, \quad \rho = 0. \quad (5)$$

Nun diskretisieren wir die Maxwell Gleichungen

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (6E)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (6H)$$

wobei wir angenommen haben, dass die Materialeigenschaften zeitlich konstant sind. Die Gleichungen (6E) und (6H) sind formal gleich. Wir betrachten deshalb hier nur (6E) explizite. Zunächst verwenden wir wieder kartesische Koordinaten. Für die x Komponente der Gleichung (6E) ergibt sich beispielsweise

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t}. \quad (6Ex)$$

Die übrigen Gleichungen ergeben sich leicht durch zyklische Vertauschung der Indizes  $x, y, z$ . Nun verwenden wir ein regelmässiges Gitter im Raum und ein regelmässiges Gitter in der Zeit und verwenden (2) sinngemäss für die Ableitungen nach  $x, y, z, t$ . Aus (6Ex) ergibt sich damit beispielsweise die FD-FD Approximation

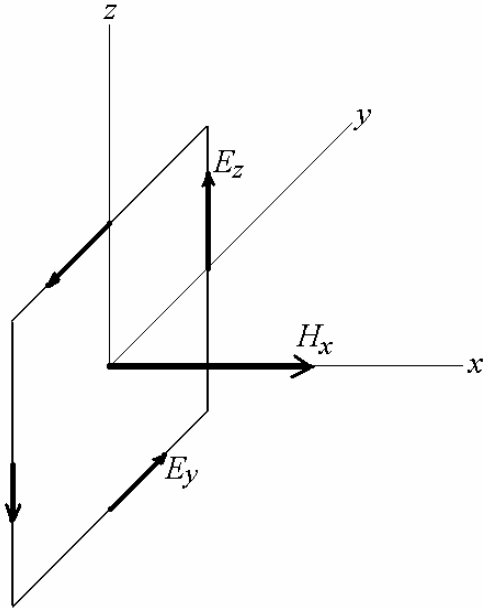
$$\frac{E_z(x, y+dy, z, t) - E_z(x, y, z, t)}{dy} - \frac{E_y(x, y, z+dz, t) - E_y(x, y, z, t)}{dz} = -\mu \frac{H_x(x, y, z, t+dt) - H_x(x, y, z, t)}{dt}. \quad (7Ex)$$

(7Ex) lässt sich nun nach  $H_x(x, y, z, t+dt)$  auflösen. Ist das Feld zum Zeitpunkt  $t$  auf dem ganzen Gitter bekannt, so lässt sich aus (7Ex)  $H_x$  zum nachfolgenden Zeitpunkt bestimmen. Mit zu (7Ex) analogen Gleichungen lassen sich alle sechs Komponenten von  $E$  und  $H$  zum Zeitpunkt  $t+dt$  bestimmen. Danach lassen sich alle Feldkomponenten zum Zeitpunkt  $t+2dt$  bestimmen usf. Ist das Feld zu einem Zeitpunkt bekannt, so kann man also seinen nachfolgenden zeitlichen Verlauf iterativ verfolgen. Ist die Diskretisierung  $(dt, dx, dy, dz)$  genügend fein, so kann man auf eine gute Approximation des Feldverlaufs hoffen. Dabei stellen sich zwei Fragen: 1) Ist das Verfahren *effizient*? 2) Ist das Verfahren *stabil*?

Es zeigt sich, dass dieses Verfahren nicht besonders effizient ist. Durch relativ einfache Tricks lässt sich die Effizienz jedoch erheblich steigern. Für die geringe Effizienz gibt es verschiedene Gründe. Zunächst wurde von einseitigen Approximationen der Ableitungen ausgegangen, welche relativ ungenau sind. Zudem findet man, dass gar nicht alle Feldkomponenten in allen Gitterpunkten miteinander verkoppelt sind. Um zu einem besseren FD Schema zu kommen, betrachten wir nun die Maxwell Gleichungen in Integralform. (6E) lautet in Integralform bekanntlich

$$\oint \vec{E} d\vec{\ell} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \iint \vec{H} d\vec{n}. \quad (6EI)$$

Die Behandlung von (6H) verläuft analog und wird deshalb nicht explizite durchgeführt. Nun führen wir eine kleine, rechteckige Fläche ein, über die auf der rechten Seite von (6EI) zu integrieren ist, beispielsweise eine Fläche senkrecht zur  $x$  Achse. Der Normalenvektor  $\vec{n}$  auf dieser Fläche zeige also in  $x$  Richtung. Die Berandung der Fläche besteht aus vier Geraden, welche parallel zur  $y$  bzw.  $z$  Richtung sein sollen (siehe Figur 3).



**Figur 3:** Veranschaulichung einer Maxwell Gleichung in Integralform für ein rechteckiges Integrationsgebiet, welches zu einem FD-TD Schema führt.

Wir nehmen nun an, die Seitenlängen  $dx$  und  $dy$  des Rechtecks seien so klein, dass sich das elektrische Feld auf jeder Seite durch seinen Wert im Mittelpunkt der Seite und das magnetische Feld auf der rechteckigen Fläche durch seinen Wert im Mittelpunkt der Fläche approximieren lässt. Damit erhalten wir aus (6EI)

$$\frac{E_z(x, y+dy/2, z, t) - E_z(x, y-dy/2, z, t)}{dy} - \frac{E_y(x, y, z+dz/2, t) - E_y(x, y, z-dz/2, t)}{dz} = -\mu \frac{H_x(x, y, z, t+dt) - H_x(x, y, z, t)}{dt} \quad (7EIx)$$

Offenbar ist (7EIx) sehr ähnlich zu (7Ex), die einseitigen Ableitungen nach  $y$  und  $z$  wurden aber durch symmetrische Ableitungen ersetzt, welche numerisch besser sind. Natürlich wollen wir auch die zeitliche Ableitung symmetrieren und schreiben deshalb besser

$$\frac{E_z(x, y+dy/2, z, t) - E_z(x, y-dy/2, z, t)}{dy} - \frac{E_y(x, y, z+dz/2, t) - E_y(x, y, z-dz/2, t)}{dz} = -\mu \frac{H_x(x, y, z, t+dt/2) - H_x(x, y, z, t-dt/2)}{dt} \quad (7EIx')$$

Wenn wir nun (7E1x') genauer betrachten, so sehen wir, dass das  $H_x$  in den Gitterpunkten  $x=i*dx$ ,  $y=j*dy$ ,  $z=k*dz$  berechnet wird, während  $E_y$  in den Gitterpunkten  $x=i*dx$ ,  $y=j*dy$ ,  $z=k*dz+dz/2$  und  $E_z$  in den Gitterpunkten  $x=i*dx$ ,  $y=j*dy+dy/2$ ,  $z=k*dz$  bekannt sein muss. Ausserdem kann  $H_x$  im Zeitpunkt  $t+dt/2$  berechnet werden, wenn  $H_x$  im Zeitpunkt  $t-dt/2$  und  $E_y$  und  $E_z$  im Zeitpunkt  $t$  bekannt sind. In analoger Weise lassen sich ähnliche Gleichungen für die übrigen Feldkomponenten herleiten. Daraus ersieht man schliesslich, dass die einzelnen Feldkomponenten an unterschiedlichen Orten des Raumes gespeichert und berechnet werden. Die H Felder werden in den Zeitpunkten  $t=l*dt+dt/2$  und die E Felder in den Zeitpunkten  $t=l*dt$  berechnet. Dabei sind  $i,j,k,l$  ganze Zahlen, welche die Gitterpunkte und die Zeitpunkte numerieren. Man sagt daher auch, H wird in den halbzahligen Zeitpunkten berechnet.

Betrachten wir beispielsweise einen Körper, welche durch eine gepulste, ebene Welle beleuchtet wird, so ist zunächst das Feld überall null. Die Initialisierung des FD-TD Algorithmus beginnt also mit  $l=0$  und setzt alle Feldkomponenten in allen Gitterpunkten zu den Zeitpunkten  $t=0$  bzw.  $t=dt/2$  zu null. Das initialisierte Feld ist damit exakt. Nun kann man aus (7E1x') und den entsprechenden Gleichungen für die übrigen Feldkomponenten abwechselnd das E und das H Feld für  $l=1,2,3,\dots$  berechnen. Die abwechselnde Berechnung von E in den ganzzahligen und H in den halbzahligen Zeitschritten hat Yee bereits vorgeschlagen, als eine praktische FD-TD Implementierung noch nicht möglich war. Dieses effiziente Verfahren nennt man *leap-frog* Schema.

Da zur Herleitung der Gleichungen die Integralform der Maxwell Gleichungen herangezogen wurde, nannte Weiland die Methode FI (Finite Integrale) statt FD. Zwischen FI und FD Programmen besteht praktisch keinerlei Unterschied, die Verwendung der Integralformen erleichtert aber das Auffinden von FD-TD Operatoren auf unregelmässigen Gittern. Diese sind von grossem Interesse, weil sie eine bessere Gitteranpassung ermöglichen, führen aber sofort auf erhebliche numerische Probleme.

Die Hauptschwierigkeit für FD-TD ergibt sich aus der Endlichkeit der Gitter und aus der Tatsache, dass sowohl die Abstände der Gitterpunkte als auch der Zeitpunkte genügend klein sein müssen. Praktisch sind die Feldgebiete aber meist unendlich. Man ist also gezwungen, das Gitter irgendwo zu beranden. Auf den Randpunkten des Gitters werden dann spezielle Operatoren eingesetzt, welche die Aufgabe haben, die Energie der auslaufenden Wellen zu absorbieren ohne Reflexionen zu erzeugen. Diese Operatoren nennt man Absorbing Boundary Conditions (ABC). Eine neuere Variante verwendet ein fiktives Material, welches in der Natur unmöglich realisiert werden kann und die Energie nahezu ohne Reflexion absorbiert. Man nennt dies Perfectly Matched Layer (PML). Natürlich erzeugt die endliche Begrenzung des Gitters immer Fehler. Ob diese akzeptabel sind, hängt von der erforderlichen Genauigkeit ab.

Bei der Berechnung des Fernfeldes, welches bei Antennen und Streufeldproblemen von grossem Interesse ist, ergibt sich sofort ein weiteres Problem, da die FD-TD Lösung nur im Nahfeld bekannt ist. Man verwendet deshalb sogenannte *near to farfield transformations*, welche im Prinzip eine Kombination mit andern Methoden erfordern, welche das Feld im ganzen Raum entwickeln. Derartigen Methoden werden wir später begegnen.

Bei TD Lösungen, d.h. Lösungen im Zeitbereich, treten natürlicherweise Schwierigkeiten auf wenn die Materialien frequenzabhängig sind oder wenn Lösungen im Frequenzbereich gesucht sind. Praktisch misst man sehr oft im Frequenzbereich, d.h., die Anregung ist zeitlich harmonisch, d.h. sinusförmig. Natürlich kann man die pulsförmige FD-TD Anregung durch eine sinusförmige Anregung ersetzen. Dann stimmt allerdings die Initialisierung des Feldes nicht mehr und es kann sehr viele FD-TD Iterationen brauchen, bis die Einschwingvorgänge abgeschlossen sind. Statt dessen kann man eine *Fourier Transformation* verwenden und erhält dann aus der Pulsantwort direkt das gesamte Frequenzspektrum. Praktisch ergeben sich dabei aber mannigfaltige numerische Probleme, so dass dieser Weg tatsächlich nur in einfachen Situationen gangbar ist. Die Behandlung frequenzabhängiger Materialien führt auf *Faltungsintegrale*, welche die Methode erheblich komplizieren.

# Matrizenmethoden

Computer können besonders gut mit Matrizen umgehen und beispielsweise relativ leicht lineare Gleichungssysteme der Form  $MA=H+E$  lösen, wobei  $M$  eine gegebene Matrix mit  $n$  Zeilen und  $M$  Kolonnen ist,  $A$  ein zu berechnender Vektor mit  $m$  Elementen,  $H$  ein gegebener Vektor mit  $n$  Elementen und  $E$  ein unbekannter Fehlervektor mit  $n$  Elementen. Man spricht von unterbestimmten Gleichungssystemen falls  $n < m$  und von überbestimmten Gleichungssystemen falls  $n > m$  ist. Unterbestimmte Gleichungssysteme und solche mit quadratischen Matrizen ( $n=m$ ) lassen sich mit  $E=0$  lösen, was natürlich keineswegs bedeutet, dass die so gefundene Lösung exakt das ursprünglich gegebene physikalische Problem löst. Der gemachte Fehler wird damit gewissermassen unter den Tisch gewischt. Für unterbestimmte Gleichungssysteme lassen sich mehrere verschiedene Lösungsvektoren finden, für  $n=m$  ist die Lösung jedoch eindeutig wenn  $E=0$  gesetzt wird.

Um eine Lösung überbestimmter Gleichungssysteme zu erhalten, muss man festlegen, was mit dem Fehlervektor  $E$  zu geschehen hat. Meist verlangt man, dass die quadratische Fehlernorm, d.h. das Skalarprodukt  $(E,E)$  des Fehlervektors mit sich selbst zu minimieren sei. Man kann dann einfach das Gleichungssystem  $MA=H+E$  mit der adjungierten Matrix  $M'$  vormultiplizieren und erhält  $M'MA=QA=M'H+M'E$ . Da  $M'M$  eine quadratische (und überdies symmetrische) Matrix ist, lässt sich dieses Gleichungssystem mit  $M'E=0$  lösen. Damit führt man die Lösung eines überbestimmten Gleichungssystems im Sinne der 'kleinsten Fehlerquadrate' (auch Residuen genannt) auf die Lösung eines quadratischen Gleichungssystems zurück. Numerisch vorteilhaft ist allerdings oft eine direkte Lösung überbestimmter Gleichungssysteme.

Wie lässt sich ein lineares Gleichungssystem herleiten, welches ein Feldberechnungsproblem repräsentiert? Offensichtlich sind die Elemente von Matrizen und Vektoren lediglich skalare Grössen, meist reelle oder komplexe Zahlen, während Felder kompliziertere Objekte sind, welche von mehreren Variablen abhängen.

Die Herleitung von Matrizengleichungen geschieht in mindestens drei Schritten. Im ersten Schritt wird das Feld durch eine endliche Reihe der Form

$$Feld = \sum_{k=1}^K A_k Basis_k + Fehler . \quad (8)$$

approximiert. Dabei bezeichnen  $Basis_k$  und  $Fehler$  ebenfalls Felder. Die Basis ist gegeben und die skalaren Parameter  $A_k$  sind so zu berechnen, dass das Fehlerfeld genügend klein wird.

Im zweiten Schritt wird der Ansatz (8) in die gegebenen Feldgleichungen eingesetzt. Die Feldgleichungen lauten beispielsweise

$$L(Feld) = H , \quad (9)$$

wobei  $L$  einen gegebenen, üblicherweise linearen Operator bezeichnet und  $H$  eine vorgegebene Inhomogenität ist. Einsetzen von (8) ergibt also

$$L(Feld) = L\left(\sum_{k=1}^K A_k Basis_k\right) + L(Fehler) = \sum_{k=1}^K A_k L(Basis_k) + L(Fehler) = H . \quad (10)$$

Das Vertauschen der Summation mit dem Operator  $L$  ist übrigens nur möglich, wenn dieser linear ist.

Nun müssen in einem dritten Schritt die nichtskalaren Grössen in (10) durch skalare Grössen beschrieben werden. Dazu eignet sich das Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$  besonders gut. Dieses ist für Vektoren und wohl auch für Funktionen bekannt, lässt sich aber auch für Felder definieren. Die Definition des Skalarproduktes von Feldern beinhaltet üblicherweise eine Integration. Integriert werden muss dabei über den Definitionsbereich von  $H$ , bzw.  $L(Feld)$ . Das Skalarprodukt kann bekanntlich als Projektion interpretiert werden. Projizieren wir die rechte Hälfte von (10) auf ein Testfeld  $T_i$  mit demselben Definitionsbereich wie  $H$ , so ergibt sich die skalare Gleichung



$$\sum_{k=1}^K A_k (L(\text{Basis}_k), T_i) = (H, T_i) - (L(\text{Fehler}), T_i). \quad (11)$$

Dabei konnte die Summation mit dem Skalarprodukt (wegen der Linearität des Skalarproduktes) vertauscht werden. Notiert man (11) für unterschiedliche Testfelder, so lässt sich dies sofort in Matrizenform  $MA=H+E$  schreiben. Dabei sind die Parameter  $A_k$  die Elemente des unbekanntes Vektors  $A$ ,  $(H, T_i)$  die Elemente des bekannten Vektors  $H$ ,  $(L(\text{Fehler}), T_i)$  die Elemente des Fehlervektors und schliesslich  $(L(\text{Basis}_k), T_i)$  die Elemente der Matrix  $M$ .

Die Qualität der durch Auflösen von (11) erhaltenen Lösung hängt von mehreren Faktoren ab. Wichtig sind insbesondere die Wahl der Basis und der Testfelder.

In praktischen Feldberechnungsproblemen ist die Situation meist etwas komplizierter. So hat man meist mehrere verschiedene Feldgleichungen, welche zur Berechnung herangezogen werden können. Die Wahl der Feldgleichungen beinhaltet auch eine Wahl der Felder mit denen man primär arbeitet, bzw. die man durch den Ansatz (8) entwickelt. Auch diese Wahl spielt für die Qualität der Lösungen eine erhebliche Rolle.

Schliesslich unterteilt man in den meisten praktischen Feldberechnungsprogrammen den gesamten Raum in Teilgebiete welche mit einem bestimmten Material ausgefüllt sind. Die Feldgleichungen in den Teilgebieten und auf den Rändern dieser Gebiete sind grundsätzlich verschieden. Wir sprechen deshalb besser von den Feldgleichungen innerhalb der Gebiete und den Randbedingungen auf den Gebietsrändern. (Letzere sind im Prinzip auch Feldgleichungen.) Es gibt deshalb zwei grundsätzlich verschiedene Methoden:

- *Gebietsmethoden*: Diskretisierung der Feldgebiete, Basis erfüllt Randbedingungen, Definition des Skalarproduktes über die Gebiete, (9) bezeichnet Feldgleichungen innerhalb der Feldgebiete, Testfelder werden in den Gebieten definiert.
- *Randmethoden*: Diskretisierung der Ränder, Basis erfüllt Feldgleichungen, Definition des Skalarproduktes auf den Rändern, (9) bezeichnet die Randbedingungen, Testfelder werden auf den Gebietsrändern definiert.

Betrachten wir der Einfachheit halber das Dirichlet Problem der Elektrostatik mit  $\Delta f=0$  im Feldgebiet und  $f=h$  auf dem Rand. Dabei ist  $f$  das skalare Potential, welches die Rolle des primären Feldes übernimmt und in eine Reihe entwickelt wird:

$$f = \sum_{k=1}^K A_k f_k + \text{Fehler}. \quad (8')$$

Verwenden wir eine Gebietsmethode, so wird das Feldgebiet diskretisiert und eine Basis darin so angesetzt, dass die Randbedingungen erfüllt werden. Beliebige sind besonders einfache Basisfelder, welche z.B. in einem Teilgebiet linear und ausserhalb des Teilgebietes Null sind. Dies wird *Subdomain* Basis genannt. Die Finite Elemente (FE) Methode ist ein typisches Beispiel dafür, aber auch FD lässt sich so formulieren. Wegen der Homogenität der Laplace Gleichung  $\Delta f=0$  verschwindet  $H$  in der Matrizengleichung zunächst, die von Null verschiedenen Randwerte führen letztlich aber doch auf ein inhomogenes Gleichungssystem. Da der Laplace Operator zweifache Ableitungen beinhaltet, wird  $\Delta f_k=0$  für alle Basisfelder, welche stückweise linear sind (ausser in Unstetigkeitspunkten der ersten Ableitungen, wo die zweiten Ableitungen nicht definiert sind). Damit ergibt sich für FE Verfahren mit stückweise linearer Basis keine Lösung. Die Feldgleichung  $\Delta f=0$  muss durch eine andere Feldgleichung ersetzt werden, welche nur erste Ableitungen enthält. Dies wird später genauer betrachtet werden.

Die Hauptschwierigkeit der Randmethoden besteht im Auffinden einer Basis, welche die Feldgleichung(en) erfüllt. Dies ist eine analytische Aufgabe, welche meist die Einführung eines einfachen Koordinatensystems und einen Separationsansatz beinhaltet. Praktisch greift man fast immer auf längst bekannte Lösungen aus entsprechenden Fachbüchern zurück. Damit erfüllt die gefundene Lösung die Feldgleichungen in allen Gebieten analytisch. Dies heisst aber nicht, dass

die Lösung exakt ist, da die Randbedingungen nur approximativ erfüllt werden. Für das Dirichlet Problem ergibt sich beispielsweise

$$\sum_{k=1}^K A_k (f_k, T_i) = (h, T_i) - (L(\text{Fehler}), T_i). \quad (11')$$

Dabei werden die Skalarprodukte und die Testfelder auf den Rändern definiert. Das Gleichungssystem (11') lässt sich mit verschiedenen Verfahren auflösen.

Bei der Wahl der Testfelder steht man meist vor dem Problem, dass einfache Testfelder zwar eine analytische Auswertung der Skalarprodukte ermöglichen, gleichzeitig aber auf relativ ungenaue Lösungen führen. Am einfachsten ist die Verwendung von Dirac Funktionen  $\delta_i$  als Testfunktionen. Diese weisen dem Skalarprodukt  $(f_k, \delta_i)$  einfach den Feldwert von  $f_k$  an demjenigen Ort zu, wo die Dirac Funktion ungleich null ist. Damit wird gewissermassen in einzelnen Punkten abgetastet. Bei Randmethoden liegen die Abtastpunkte oder Matching Punkte auf den Rändern, bei Gebietsmethoden in den Gebieten. Dieses Verfahren nennt man *Point Matching* oder auch *Kollokation*. Eine explizite Definition des Skalarproduktes und der Testfunktionen ist dabei nicht nötig. Es genügt die Wahl der Matching Punkte.

Sehr genaue Resultate erhält man mit der *Galerkin* Methode, bei der für die Testfelder dieselben Feldfunktionen wie für die Basis verwendet werden. Für das mit der Randmethode gelöste Dirichlet Problem ergibt sich dann beispielsweise

$$\sum_{k=1}^K A_k (f_k, f_i) = (h, f_i) - (L(\text{Fehler}), f_i). \quad (11'')$$

Dieselbe Lösung erhält man, wenn man die quadratische Fehlernorm auf dem Rande minimiert. Die Galerkin Methode ist in diesem Sinne optimal. Leider lassen sich die in (11'') auftretenden Skalarprodukte nur in seltenen Fällen analytisch berechnen. Zur Berechnung ist dann eine numerische Integration erforderlich, welche durch eine Summation ersetzt wird. Damit bekommt (11'') die Form

$$\sum_{k=1}^K A_k \sum_{l=1}^L f_k(P_l) \cdot f_i(P_l) \cdot \ell_l = \sum_{l=1}^L h(P_l) \cdot f_i(P_l) \cdot \ell_l - (L(\text{Fehler}), f_i) + \text{Fehler}. \quad (11''')$$

Der Einfachheit halber wurde dabei von einem zweidimensionalen Gebiet mit eindimensionalem Rand ausgegangen. Das Skalarprodukt beinhaltet dann ein eindimensionales Integral, welches durch die Summe über  $l$  ersetzt wird. Zum ursprünglichen *Fehler* gesellt sich nun ein Integrationsfehler, der bei genügend hoher Anzahl  $L$  der Integrationspunkte klein wird. Verwendet man Matrizen, so lässt sich die Integrationssumme als Matrizenprodukt interpretieren. Man kann dann anstelle von (11''') schreiben:  $M'MA = MH + \text{Fehlerterme}$ . Dabei ist die Matrix  $M$  identisch mit einer gewichteten Matrix, welche sich mit der Kollokationsmethode ergibt. Die Gewichtungsfaktoren sind dabei Terme der Form  $\sqrt{\ell_l}$ . Diese Terme ergeben sich aus der numerischen Integration bei der Fehlerminimierung. Wichtig ist dabei, dass  $L$  mindestens so gross wie  $K$  gewählt werden muss, d.h. das Gleichungssystem  $MA = H + E$  sollte überbestimmt sein. Mit diesem *verallgemeinerten Point Matching* Verfahren, sogenannten *gewichteten Residuen*, lassen sich relativ einfach und effizient genaue Lösungen ohne Auswertung von Integralen finden. Da das Vormultiplizieren mit  $M'$  numerisch problematisch ist, empfiehlt sich die direkte Lösung von  $MA = H + E$  anstelle von (11'''), d.h.

$$\sum_{k=1}^K A_k f_k(P_l) \sqrt{\ell_l} = h(P_l) \sqrt{\ell_l} + \text{Resid}(P_l) \sqrt{\ell_l}, \quad l = 1, 2, \dots, L. \quad (12)$$

Die Projektionsmethode, die Fehlerminimierung und das verallgemeinerte Point Matching Verfahren lassen sich auf fast beliebig komplizierte Feldprobleme anwenden.

# MMP / GMT

Das Mehrfach Multipol Program (MMP) ist ein am IFH entwickeltes Programm, basierend auf der Generalized Multipole Technique (GMT), welche ebenfalls am IFH und unabhängig davon von verschiedenen Gruppen in der Sowjetunion, USA und andern Ländern. GMT ist eine Randmethode, welche Multipolfelder als Basis bevorzugt, jedoch diese auch mit andern analytischen Lösungen der Maxwell Gleichungen kombiniert. In der Dynamik arbeitet diese Technik im Frequenzbereich. Es wird also mit komplexen Maxwell Gleichungen gearbeitet und eine Zeitabhängigkeit der Form  $T(t) = e^{-i\omega t}$  vorausgesetzt. Zur Herleitung von Multipolfeldern in 2D Anwendungen werden Polarkoordinaten eingesetzt, in 3D hingegen Kugelkoordinaten. Wegen der Singularität dieser Koordinatensysteme im Ursprung ( $r=0$ ) ergeben sich Lösungen der Feldgleichungen, welche ebenfalls für  $r=0$  singularär werden. Der Einfachheit halber betrachten wir Multipolfunktionen, welche die 2D Laplace Gleichung erfüllen. Diese lauten in Polarkoordinaten:

$$\log(r), \quad r^{-n} \cos(n\varphi), \quad r^{-n} \sin(n\varphi). \quad (13)$$

Der erste Term hat ein rotationssymmetrisches Feld und wird Monopol genannt. Dieser Term entspricht einer Linienladung, welche auf der Ebene senkrecht steht. 2D Feldprobleme erhält man üblicherweise bei zylindrischen Anordnungen mit der Zylinderachse  $z$ . In der Statik ist dann das Feld in  $z$  Richtung konstant, muss also nur in der Transversalebene, bei  $z=0$  berechnet werden. Für das physikalische Verständnis ist die 3D Vorstellung einer zylindrischen Anordnung hilfreich. Hier entspricht der Monopol tatsächlich einer Linienladung. Numerisch wird in der Transversalebene gearbeitet, wo sich der Monopol durch einen Punkt auszeichnet in dem sein Feld singularär ist.

Die restlichen Terme sind Multipole der Ordnung  $n$ . Für  $n=1$  nennt man diese Dipole. Im Prinzip kann die Multipolordnung eine beliebige reelle Zahl sein, nur für ganzzahlige Ordnungen wird die Funktion jedoch eindeutig. Sonst ergeben sich für ein und denselben Raumpunkt unterschiedliche Feldwerte, je nachdem wie der Winkel  $\varphi$  gewählt wird. N.B.  $(r, \varphi)$  und  $(r, \varphi + 2k\pi)$  bezeichnen für ganzzahlige  $k$  denselben Punkt. Bevorzugt werden deshalb Multipole mit ganzzahliger Ordnung. Dies gilt übrigens auch in der Dynamik.

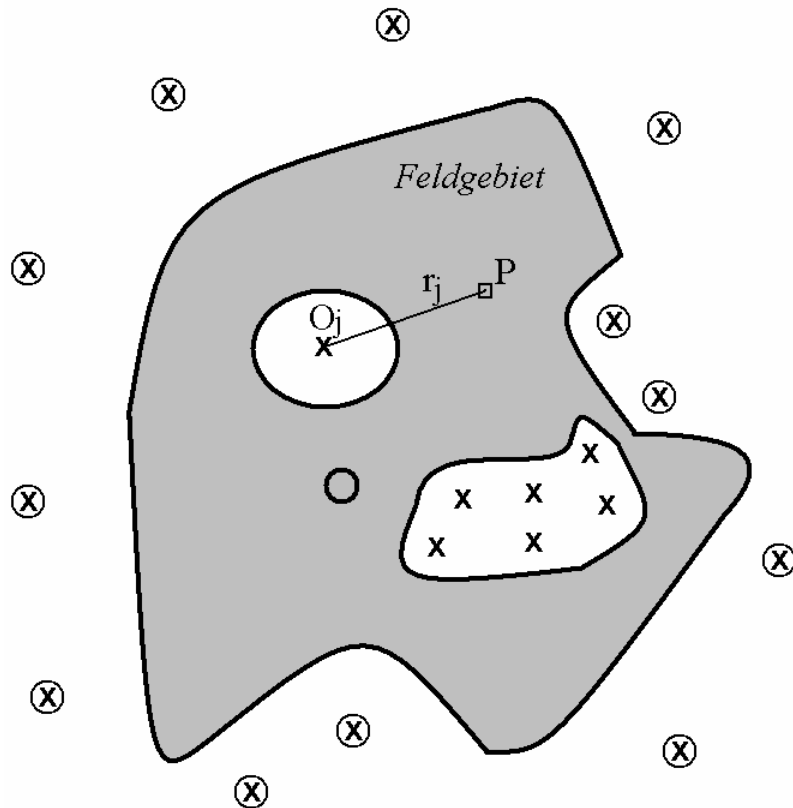
Die Wahl des Ursprungs des Polarkoordinatensystems und damit die Wahl des Multipolortes ist ziemlich willkürlich. Wegen der Feldsingularität muss dieser lediglich irgendwo ausserhalb des gegebenen Feldgebietes liegen. Die Entwicklung des Feldes in einem Gebiet mit einem einzigen Multipolansatz ist nur in seltenen Fällen ausreichend. Eine wesentliche Verbesserung erhält man durch den Ansatz mehrerer Multipole für jedes Feldgebiet. Dabei werden bevorzugt die Polorte längs des Gebietsrandes (ausserhalb des Gebiets) verteilt (siehe Figur 4). Ein mehrfach Multipole Ansatz (kurz MMP Ansatz) schreibt sich damit folgendermassen:

$$f(r, \varphi) = \sum_{j=1}^J \left( A_{j0} \log(r_j) + \sum_{k=1}^{K_j} A_{jk} r_j^{-k} \cos(k\varphi_j) + B_{jk} r_j^{-k} \sin(k\varphi_j) \right). \quad (14)$$

Dabei numeriert  $j$  die  $J$  Multipole und  $k$  die betreffenden Ordnungen. Die maximalen Ordnungen  $K_j$  jedes Multipoles können unterschiedlich gewählt werden. Dies ist der üblichste, allerdings nicht der allgemeinste Multipolansatz. Hat das Feldgebiet einen einigermaßen runden äusseren Rand, so können die Multipole ausserhalb dieses Randes bequem durch eine sogenannte Normalentwicklung der Form

$$f(r, \varphi) = A_0 + \sum_{k=1}^K A_k r^k \cos(k\varphi) + B_k r^k \sin(k\varphi) \quad (15)$$

ersetzt werden. Offensichtlich gleicht die Normalentwicklung einem einzelnen Multipol stark, ist im Ursprung jedoch endlich und nicht singularär.



**Figur 4:** Multipolansatz für ein beliebiges Feldgebiet. Die Polorte sind durch Kreuze markiert. Die äusseren Multipole sind eingekreist. Diese lassen sich durch eine Normalentwicklung ersetzen. Die Normalentwicklung ist mit einem Kreis markiert. Die Multipole 'beleuchten' den Rand des Feldgebietes. Gute Resultate sind bei einer einigermaßen regelmässigen 'Beleuchtung' zu erwarten. Der Ort der Normalentwicklung ist nahezu unerheblich.

MMP verwendet das verallgemeinerte Point Matching Verfahren zur Berechnung der Parameter in den Multipolansätzen und gegebenenfalls in den Normalentwicklungen. Diesem Verfahren kommt besondere Bedeutung zu, weil die Kondition der MMP Matrizen oft so schlecht ist, dass andere Methoden versagen. Die Möglichkeit, mit schlecht konditionierten Matrizen zu arbeiten erhöht übrigens die Freiheit des Benutzers beim MMP Ansatz und erhöht ausserdem die Wahrscheinlichkeit mit relativ kleinen Matrizen genaue Resultate zu erhalten. Die Vorteile schlecht konditionierter Matrizen werden fast immer übersehen.

Die Erweiterung von MMP für dynamische Probleme im Frequenzbereich ist relativ einfach. Es ergeben sich dieselben Ansätze wie in der Statik, die radialen Terme  $\log(r)$ ,  $r^n$  werden durch die Hankelfunktionen  $H_0^{(1)}(\kappa r)$ ,  $H_n^{(1)}(\kappa r)$  und  $1$ ,  $r^n$  durch die Besselfunktionen  $J_0(\kappa r)$ ,  $J_n(\kappa r)$  ersetzt. Zudem erhält man für zylindrische Anordnungen durch Separation in z Richtung die z Abhängigkeit  $Z(z) = e^{i\gamma z}$ . Dabei ist  $\gamma$  die Fortpflanzungskonstante, welche aus der Leitungstheorie bekannt ist. Ausserdem bezeichnet  $\kappa$  die transversale Wellenzahl  $\kappa = \sqrt{k^2 - \gamma^2}$ . Für die Wellenzahl  $k$  gilt ausserdem in einem linear homogen, isotropen Material  $k = \omega \sqrt{\mu(\epsilon + i\sigma/\omega)}$ . Ein mehrfach Multipolansatz für zylindrische Probleme lautet nun

$$f(r, \varphi, z, t) = \sum_{j=1}^J \left( A_{j0} H_0^{(1)}(r_j) + \sum_{k=1}^{K_j} A_{jk} H_k^{(1)}(r_j) \cos(k\varphi_j) + B_{jk} H_k^{(1)}(r_j) \sin(k\varphi_j) \right) e^{i(\gamma z - \omega t)}. \quad (14')$$

Die Normalentwicklungen ergeben sich in analoger Weise. Zu beachten ist, dass man nun mit komplexwertigen Feldern arbeitet.

Die Situation kompliziert sich in der Dynamik insofern als das Feld nun aus E und H besteht und ein skalares Potential im allgemeinen zur Lösungsbeschreibung nicht ausreicht. Man kann zeigen, dass die Longitudinalkomponenten von E und H die Rolle zweier skalarer Potentiale übernehmen und dass sich die Transversalkomponenten als Ableitungen aus den Longitudinalkomponenten ergeben. Es genügt deshalb für Ez und Hz je einen Ansatz der Form (14') - mit unterschiedlichen Parametern - zu machen.

Die Erweiterung auf 3D Probleme bietet praktisch keine besonderen Probleme. Es wird ein Separationsansatz in Kugelkoordinaten gemacht. Für die Radialabhängigkeit ergeben sich dann modifizierte Hankelfunktionen anstelle der gewöhnlichen Hankelfunktionen, die z Abhängigkeit wird durch die  $\vartheta$  Abhängigkeit ersetzt, für welche sich Legendre Funktionen ergeben. Die  $\varphi$  und  $t$  Abhängigkeit bleiben unverändert.

Im Gegensatz zu Gebietsmethoden hat MMP keine Probleme mit offenen Gebieten, da die Ränder diskretisiert werden. Daraus wird auch sofort klar, dass sich Probleme ergeben können, wenn die Ränder unendlich ausgedehnt sind. Sind die unendlichen Ränder analytisch beschreibbar, z.B. gerade, so helfen oft analytische Lösungen. Für periodische Ränder bietet MMP eine einfache Lösung mit sogenannten periodischen Randbedingungen. Absorbierende Randbedingungen wie bei FD-TD sind zwar denkbar, wurden jedoch bisher nie verwendet.

Da der Diskretisierungsaufwand mit der Länge der Ränder zunimmt, ist klar, dass für Randmethoden voluminöse Körper mit relativ kurzen Rändern angenehmer sind als schlanke Körper mit relativ langen Rändern. So sind insbesondere dünne Folien und dünne (gekrümmte) Drähte problematisch. Einen Ausweg bieten hier spezielle Ansätze mit Feldfunktionen welche sich durch Integration von verteilten Multipolanordnungen ergeben oder Feldfunktionen, welche in der Momentenmethode häufig verwendet werden.

Die Hauptschwierigkeit bei der Anwendung von MMP besteht im Auffinden eines geeigneten Ansatzes. Dafür gibt es verschiedene, einfache Richtlinien. Ausserdem ist ein gutes Verständnis der Physik immer hilfreich. Erfahrene Anwender können deshalb stets wesentlich effizientere Ansätze finden als Anfänger. Dies mag für Anfänger frustrierend sein, ist aber auch ein Vorteil.

Sind die Ränder glatt, so weist MMP eine extrem gute Konvergenz auf. Es können deshalb sehr genaue Resultate mit relativ geringem Aufwand erreicht werden. Gleichzeitig bedeutet dies auch, dass der Aufwand für nicht sehr genaue Abschätzungen nur unwesentlich kleiner ist als für genaue Berechnungen. Für solche Abschätzungen sind Verfahren mit schlechter Konvergenz oft vorteilhaft.

MMP ermöglicht eine ausgezeichnete Fehlerabschätzung. Meist tritt der maximale Fehler auf dem Rand auf und zwar an Stellen wo die erste oder eine höhere Ableitung des Randes unstetig ist, an Stellen mit geringem Krümmungsradius, oder an Stellen mit grober Randdiskretisierung. Da die Matching Punkte längs des Randes relativ frei gesetzt werden können, ist eine lokale Reduktion des Fehlers relativ einfach zu bewerkstelligen.

MaX-1 (Demo Version auf <http://alphard.ethz.ch>) enthält eine moderne 2D Version von MMP.

# Bildladungsverfahren

In der Hochspannungstechnik ist die Berechnung der maximalen Feldstärken in einer gegebenen Anordnung von besonderer Bedeutung, da zu hohe Feldstärken zu Überschlügen führen. Da Gebietsmethoden die maximalen Feldstärken meist extrem unterschätzen, werden in der Hochspannungstechnik seit langem Randmethoden bevorzugt. Besonders beliebt ist das Bildladungsverfahren, welches als ein Spezialfall von MMP betrachtet werden kann. Das Bildladungsverfahren beschränkt sich auf die Elektrostatik und verwendet nur Monopole, welche physikalisch das Feld von Punktladungen simulieren. Da die Monopole ausserhalb des Feldgebietes liegen, nennt man diese Bildladungen. Im zweidimensionalen Fall wird also der MMP Ansatz (14) verwendet, wobei jedoch die höheren Multipolordnungen weggelassen werden. Dadurch vereinfacht sich der Ansatz zu

$$f(r, \varphi) = \sum_{j=1}^J A_j \log(r_j). \quad (14B)$$

Im dreidimensionalen Fall wird der Bildladungsansatz noch einfacher und zwar

$$f(r, \varphi, \vartheta) = \sum_{j=1}^J A_j / r_j. \quad (14B')$$

Dabei bezeichnet  $r_j$  jeweils den Abstand des Feldpunktes zum Ursprung der betreffenden Bildladung. Die Bildladungen werden im Prinzip in gleicher Manier wie die Multipole längs der Ränder verteilt, um dieselbe Genauigkeit zu erreichen wie mit Multipolen höherer Ordnung, werden jedoch mehr Bildladungen benötigt und diese näher zu den Rändern gerückt. Dadurch können Matching Punkte auf den Rändern und Bildladungen klar korreliert werden. Bei einer guten Korrelation kann man mit quadratischen Matrizen arbeiten. Auf das verallgemeinerte Point Matching Verfahren mit überbestimmten Gleichungssystemen kann verzichtet werden.

## Andere Varianten von MMP/GMT

MMP/GMT wurde von verschiedenen Gruppen unter unterschiedlichen Namen mehr oder weniger genau nacherfunden. So durch Ludwig (USA): *SPEX* (SPHERICAL EXpansions – nur 3D Scattering und ideal leitendem Körper, andersgeartete Fehlerabschätzung), Eremin (Russland): *DS* (*Discrete Sources* – nur rotationssymmetrische Streukörper, Verwendung von Multipolen mit komplexem Ursprung).

Ein zum Bildladungsverfahren analoges Verfahren für dynamische Probleme wurde in Georgien schon seit den dreissiger Jahren unter dem Namen *MAS* (*Method of Auxiliary Sources*) entwickelt. Ein ähnliche Verfahren (*Fictitious Sources*, *Filimentary Currents*, etc.) stammen aus Frankreich und Israel/USA.

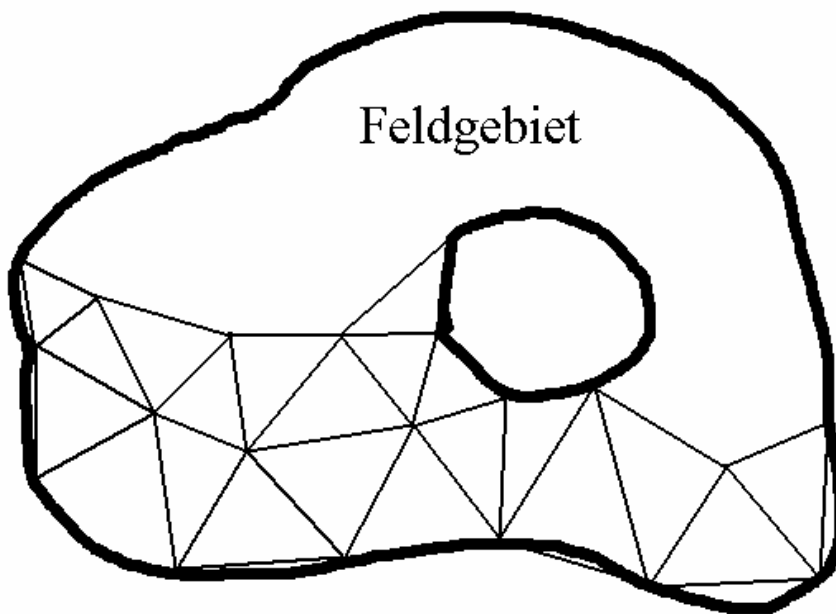
Verwendet man den Ansatz der Normalentwicklung (15) in Kombination mit je einem Multipolansatz pro Loch in einem zweidimensionalen Feldgebiet, so ist dies gemäss *Vekua* (Georgien!) theoretisch ausreichend um jede beliebige Lösung in einem (brav berandeten) Feldgebiet beliebig genau zu approximieren. Dies wurde von Yasuura in Japan aufgegriffen. Zusammen mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate ergab sich daraus die *Yasuura Methode*. Ähnliche Methoden wurden um 1970 in den USA unter den Namen *Point Matching* und *Circular Harmonics* entwickelt und kurz darauf wegen numerischer Probleme verworfen. Die Yasuura Methode ist nur in einfachen Fällen effizient, meist aber praktisch unbrauchbar. In Japan wird MMP unter dem Namen *advanced Yasuura method* gehandelt.

Der zu Vekua's Beweis analoge Beweis für dreidimensionale Probleme steht übrigens immer noch aus.

# Finite Elemente

Betrachtet man die FD Methode mit regelmässigen, rechteckigen Gittern, so wird sofort klar, dass diese Gitter nur schlecht an beliebige Ränder angepasst werden können, was zu erheblichen Fehlern führen kann. Zwar führen verschiedene Techniken zu Verbesserungen, aber auch zu komplizierteren Programmen und zu neuen Problemen. Will man nicht zu einer Randmethode übergehen, so kann man zunächst den Schwerpunkt auf die Raumdiskretisierung legen, was zur Methode der Finiten Elemente (FE) führt.

Der Einfachheit halber beschränken wir uns wieder auf zweidimensionale Probleme. Die rechteckigen FD Gitter approximieren anscheinend die Ränder durch eine treppenförmige Linie. Eine erste Verbesserung ist offenbar die Approximation mit einem Polygon. Eine solche kann z.B. erreicht werden, wenn der 2D Raum trianguliert wird, d.h. in ein Netz von Dreiecken unterteilt wird. Dabei kann man zunächst die Ränder durch Polygone ersetzen und anschliessend den Raum passend triangulieren.



**Figur 5:** Teiltriangulierung eines Feldgebietes.

Mit FD Augen gesehen erhält man durch Triangulierung ein unregelmässiges Gitter. In einem solchen Gitter treffen sich in jedem Knoten mindestens drei Gitterlinien – ausgenommen auf dem Gebietsrand, wo eventuell nur zwei Gitterlinien in einem Knoten enden. Die maximale Anzahl der Gitterlinien pro Knoten ist theoretisch unbeschränkt. Gute Resultate erhält man jedoch nur wenn alle Dreiecke möglichst gleichseitig sind. Deshalb treffen sich bei guten Gittern maximal 7 Linien in einem Knoten. Im Prinzip kann man nun nach FD oder FI Art passende Operatoren definieren.

FE geht einen etwas andern Weg, indem zunächst die Dreiecke betrachtet werden. Ganz im Sinne einer Matrizenmethode wird das Feld in jedem Dreieck, d.h. Element, in eine Reihe der Form (8) entwickelt. Besonders einfach und daher besonders beliebt ist die Approximation des skalaren Potentials  $V(x,y)$  durch eine in  $x$  und  $y$  lineare Funktion, d.h.

$$V_i(x, y) = a_i x + b_i y + c_i + \text{Fehler} . \quad (15)$$

Dabei bezeichnet der Index  $i$  die Nummer des Elements. Pro Element hat man also 3 unbekannte Parameter, welche so zu bestimmen sind, dass der Fehler möglichst klein wird.

Die gesamte Anzahl freier Parameter lässt sich beträchtlich reduzieren, wenn man fordert, dass die FE Approximation des Potentials eine über das ganze Feldgebiet stetige Funktion sein soll. Diese Forderung ist übrigens keineswegs zwingend aber hilfreich. Wie lässt sich diese Forderung ausnutzen? Die Antwort auf diese Frage ergibt sich aus der Betrachtung mit FD Augen. Bei FD würde man ja die Werte in den Knoten, also in den Eckpunkten der Dreiecke verwenden. Nehmen wir an, das  $i$ -te Element habe die Eckpunkte  $(x_j, y_j)$ ,  $(x_k, y_k)$ ,  $(x_l, y_l)$  und die zugehörigen Eckwerte seien  $V_j$ ,  $V_k$ ,  $V_l$ . Daraus lassen sich offenbar die Parameter in (15) sofort – durch Lösung eines kleinen Gleichungssystems mit 3 Gleichungen und drei Unbekannten - berechnen. Arbeitet man mit den Eckwerten, so ergibt sich automatisch die Stetigkeit an den Elementsgrenzen und gleichzeitig eine starke Reduktion der freien Parameter (weil die Anzahl der Knoten üblicherweise viel kleiner als die Anzahl Elemente mal drei ist).

Es stellt sich nun die Frage, wie die Eckwerte, bzw. Die Knotenwerte zu berechnen sind. Wie bei FD braucht man nur die inneren Knotenwerte zu berechnen, wenn die Knotenwerte auf dem Rand vorgegeben sind – wie dies z.B. beim Dirichlet Problem der Elektrostatik der Fall ist. Anders als bei FD verwenden wir nun aber die Approximation (15) in jedem Element. Das Hauptproblem besteht nun darin, dass der Laplace Operator, welcher die Statik beschreibt, zweifache Ableitungen enthält und die zweifachen Ableitungen der linearen Approximationen (15) verschwinden. Im allgemeinen ist ausserdem die Ableitung der Approximation auf den Elementsgrenzen unstetig und somit die zweite Ableitung nicht definiert. Wir sind also durch den linearen Ansatz in den Elementen gezwungen, nur Feldgleichungen zu verwenden, in denen höchstens einfache Ableitungen auftreten. Besonders beliebt sind Formulierungen mit Variationsintegralen. Da in den Vorlesungen für Elektroingenieure die Variationsrechnung sehr stiefmütterlich behandelt wird, betrachten wir hier nur den Fall der Elektrostatik mit einem einzigen Feldgebiet mit vorgegebenen Randwerten. Das Prinzip der minimalen Energie besagt nun, dass sich das elektrostatische Feld so einstellt, dass die gesamte Feldenergie minimal wird. Da das elektrische Feld der negative Gradient des skalaren Potentials ist und da die elektrische Feldenergie das Skalarprodukt von  $E$  und  $D$  Feld ist, gilt

$$W = \int_G w dF = \int_G \vec{D} \vec{E} dF = \int_G \varepsilon \text{grad}^2 V dF = \sum_{i=1}^I \varepsilon_i (a_i^2 + b_i^2) F_i = \min . \quad (16)$$

Dabei bezeichnet  $F_i$  die Fläche des  $i$ -ten Elements. Die Dielektrizitätskonstante kann von Element zu Element unterschiedlich sein, wird aber innerhalb jedes Elements als konstant angenommen um eine Integration über das Element zu vermeiden. In (16) muss man nun noch die Parameter  $a$  und  $b$  durch die Eckpunktswerte des betreffenden Elements ersetzen. Die Gesamtenergie  $W$  ist dann minimal, wenn alle Ableitungen von  $W$  nach den Parametern bzw. den Eckpunktswerten verschwinden. Damit erhält man für jeden Parameter genau eine Gleichung. Da die Parameter in (16) in quadratischer Form auftreten, führt die Ableitung von (16) nach den Parametern zu linearen Gleichungen. Das resultierende Gleichungssystem ist daher linear und quadratisch. Da jeder Knoten über die finiten Elemente mit nur wenigen Nachbarknoten verbunden ist, wird die FE Systemmatrix zwar etwas komplizierter, aber doch ähnlich dünn besetzt wie eine FD Matrix mit regelmässigem Gitter. Für effiziente Lösungen werden deshalb passende iterative Algorithmen eingesetzt, welche üblicherweise nur diejenigen Matrixelemente speichern, welche nicht verschwinden. Da die Knotenwerte auf den Rändern bekannt sind, ist das Gleichungssystem übrigens inhomogen.

Bei FD wird die eigentliche Systemmatrix gar nicht explizite aufgestellt und einfach über alle Gitterpunkte iteriert. Wegen der regelmässigen Gitter ist zudem die Gittertopologie so einfach, dass sie nicht speziell notiert werden muss: Die benachbarten Knoten weisen jeweils einen einzigen um eins unterschiedlichen Index auf. Bei FE arbeitet man explizite mit der Systemmatrix und muss überdies über die Gittertopologie Buch führen, d.h., man braucht Tabellen, in welchen angegeben wird, welche Gitterknoten die Eckpunkte jedes Elements bilden. Der organisatorische Aufwand bei FE ist deshalb erheblich grösser als bei FD.



Der Übergang zu unregelmässigen Gittern erhöht offensichtlich den Spielraum bei der Gebietsdiskretisierung enorm. Dadurch ergibt sich die Möglichkeit, das Gitter den gegebenen Gebietsrändern viel besser anzupassen. Gleichzeitig führt die gewonnene Freiheit zu neuen Problemen von deren Lösung die Qualität der FE Resultate stark abhängt. Es zeigt sich insbesondere, dass die Elemente mit zu spitzen Winkeln zu unbrauchbaren Resultaten führen können. Für gute Resultate ist der Einsatz eines guten Gittergenerators ausschlaggebend. Gute Gitter bestehen aus nahezu gleichseitigen Dreiecken und lassen meist die Lösung des Feldproblems bereits erahnen. Häufig werden deshalb die Gitter adaptiv verfeinert. D.h. man entwirft zuerst ein einfaches Gitter, errechnet darauf eine erste Näherung und verfeinert dann das Gitter anhand der ersten Näherung.

In der Zeit vor 1970 wurde übrigens in der Elektrostatik ein rein graphisches Verfahren zur Feldberechnung eingesetzt (Lehmann). Dabei wurde das Feldgebiet mit möglichst quadratischen Vierecken abgedeckt. Gelingt es, ein solches ausgeglichenes Gitter zu zeichnen, so entsprechen die Gitterlinien recht genau den Feldlinien und den dazu orthogonalen Potentiallinien.

Neben dem grösseren administrativen Aufwand ist ein weiterer Nachteil des bisher beschriebenen FD Verfahrens gegenüber FE darin begründet, dass die Feldapproximation in den Elementen relativ grob ist. Elemente erster Ordnung (mit linearer Feldapproximation) sind zwar einfach, aber keineswegs zwingend. Man kann im Prinzip ohne weiteres auch Elemente höherer Ordnung einsetzen. Die resultierende Systemmatrix wird dann allerdings weniger dünn besetzt und das gesamte Verfahren umständlicher. Ob auf diese Weise eine effizientere Verbesserung als durch Gitterverfeinerung erzielt wird, hängt von der konkreten Problemstellung ab. Die Elemente brauchen überdies nicht dreieckig zu sein. FE Verfahren mit viereckigen Elementen ähneln stark den FD Verfahren mit unregelmässigen Gittern.

Wie FD weist auch FE Probleme auf, wenn die Feldgebiete unendlich ausgedehnt sind. Zur Lösung dieser Probleme bestehen natürlich verschiedene Verfahren, welche hier jedoch nicht vorgestellt werden. Der Kreativität der Codedesigner sind hier kaum Grenzen gesetzt.

In früheren Jahren wurde bei FE Verfahren fast ausschliesslich Variationsintegrale verwendet. Diese sind aber nicht zwingend und insbesondere in der Elektrodynamik heikel. Wird das FE Verfahren entsprechend verallgemeinert, so werden die Grenzen zu FD fließend bzw. eliminiert. Welche Variation einer FE Formulierung bevorzugt wird, hängt nicht zuletzt von der analytischen Ausbildung des Codedesigners ab. Ingenieure, welche in der Variationsrechnung nicht sattelfest sind, tun gut daran, diese zu vermeiden. Im folgenden wird nun eine FE Variante vorgestellt, welche sich zunehmender Beliebtheit erfreut und auf sogenannten Vektorelementen beruht.